Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение Одинцовская гимназия №11

(143000, Московская область, г. Одинцово, ул. Любы Новоселовой бул., д.7)

Тел. 599-44-10

Школьная научно-исследовательская работа

по математике

Тема

“Применение интегралов в жизни людей”

Выполнила:

Овчарова Анастасия Максимовна, 11 класс

Московская область,

г. Одинцово,

ул. Любы Новоселовой бул., д.12А, кв.45

Руководитель:

Каширина Елена Александровна,

учитель математики

МБОУ Одинцовской гимназии №11

Одинцово

2021

Оглавление

1. Введение………………………………………………………………3
2. История интегралов…………………………………………………..5
3. Общие сведения………………………………………………………7

3.1 Неопределённый интеграл. Понятие первообразной…………..7

3.2 Определённый интеграл. Формула Ньютона – Лейбница……..9

3.3 Вычисление площади криволинейной трапеции……….….….10

4. Интегралы в жизни людей….……………….……...….….…………11

4.1 Физика……………………………………………………………11

4.2 Биология и медицина……………………………………………13

4.3 Экономика………………………………………………………..14

4.4 Архитектура………………………………………………………15

5.Заключение…………………………………………………………….16

6. Список литературы…………………………………………………...17

**ВВЕДЕНИЕ.**

В конце 11 класса, мы столкнулись с понятием интегралов. На уроках математики мы узнали, что такое первообразная, их основные формулы, способы нахождения площади криволинейной трапеции и понятие интегралов. Но мне стало интересно, что же это такое? Зачем мы их изучаем? Что они собой представляют? И в каких сферах жизнедеятельности людей применяются интегралы? Чтобы утолить свой интерес, я решила разобраться в этой теме более подробно.

Ещё в древние времена учёные стремились выразить все явления природы в виде формул. Ведь, когда ты знаешь определённую формулу, можно с её помощью провести любые необходимые тебе вычисления.

Интеграл – это тоже ещё один способ упростить трудоёмкие вычисления. Он представляет из себя сумму бесконечного множества малых слагаемых.

Так, с помощью интегралов можно найти площадь или объём любой геометрической фигуры. Такой как круг, шар, цилиндр, конус, и даже криволинейной трапеции. Основной смысл нахождения заключается в том, что фигуру, площадь которой нужно найти, разбивали на множество более простых, площадь которых нам уже известна, и выражали её как сумму множества слагаемых.

Также, с помощью интегрирования можно найти не только площадь фигур, но и такие физические величины как энергия, массу, силу тока, работу и многие другие.

Несомненно, открытие логарифмов упростило работу многих математиков, ведь множество задач, требовавших раньше длительного решения, теперь решаются практически в пару строчек.

Но неужели интегралы нашли себе применение только в алгебре и геометрии? Нет, ведь математика тесна связана со всеми остальными науками и сферами человеческой деятельности, и любый объект её исследования обязательно будет использован в жизни людей.

“Нет ни одной области математики, как бы абстрактна она не была, которая когда-нибудь не окажется применимой к явлениям действительного мира.”

Николай Иванович Лобачевский

3

Объект исследования –интегралы.

Предмет исследования – практическое применение интегралов и их влияние на жизнь человека.

Актуальность – столкнувшись с новым понятием, многие ученики с неохотой начинают изучение новой темы, особенно если она сложна в понимании. Некоторые даже не хотят разбираться в этой теме, считают интегралы чем-то очень сложным и ненужным в дальнейшей жизни. Этой работой я хочу доказать, что интегралы оказывают очень важное влияние на деятельность людей, и, если постараться в них разобраться, то это достаточно простой и интересный предмет для изучения.

Проблема – отсутствие интереса к предмету и понимания среди учащихся цели изучения интегралов.

Методы исследования:

1. Изучение литературы и сети интернет.

2. Анализ текста.

Гипотеза – если в математике есть теория интегралов, то они должны найти себе применение и на практике.

Цель работы – доказать, что знание интегралов нужно не только человеку, непосредственно связанному с математикой, но и людям других специальностей.

Задача нашего исследования выяснить:

1.Когда появились интегралы?

2.Что представляют из себя интегралы?

3.В каких сферах человеческой деятельности используют интегралы?

4

**ИСТОРИЯ ИНТЕГРАЛОВ.**

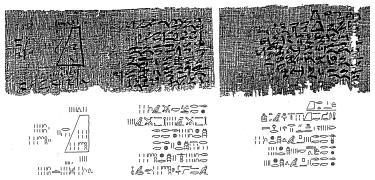
Впервые люди начали использовать метод интегрирования ещё в Древней Египте в 1800 года до нашей эры. Доказательства этому можно найти в Московском математическом папирусе (или математическом папирусе Голенищева).

Позже, в 370 году до нашей эры Евдокс Книдский воспользовался первым известным методом для расчёта интегралов – методом исчерпывания Евдокса. Он использовался для исследования площади и объёма криволинейных фигур. Смысл этого метода заключался в том, что фигуру, площадь или объём которой необходимо было найти, разделяли на множество более мелких частей, площадь или объём которых нам уже известен.

Далее этот метод стал развиваться в работах великого древнегреческого учёного Архимеда (287 до н.э. – 212 до н.э.) и применялся для расчёта площадей парабол и примерного расчёта площади круга. Идентичный этому метод был разработан в Китае в 300 годах нашей эры математиком Лю Хуэйем, которых с его помощью находил площадь круга. А в конце V века этот метод использовали математики Цзу Чунжи и его сын Цзу Гэн для нахождения объёма шара.

Позже, в XI веке в Ираке большой шаг в развитии интегрирования предпринял арабский учёный Абу Али аль-Хасан ибн аль-Хасан ибн аль-Хайсам аль-Басри, известный под именем Альхазен. В своей работе “Об измерении параболического тела” использует формулы для нахождения суммы последовательных квадратов, кубов, четвёртых степеней, а также ряд других формул. С помощью них он провёл вычисление, равносильное вычислению определённого интеграла:

dx



Математический папирус Голенищева.

5

Следующий значительный шаг в применении интегралов состоялся только в XVI веке в трудах итальянского математика Бонавентура Франческо Кавальери (1598 – 1647) и французского математика Пьера де Ферма (1601 - 1665), где они описывали предложенный ими метод неделимых. Таким образом они заложили основы современного интегрального исчисления.

В дальнейшем развитие интегрирования связано с деятельностью английского математика Исаака Барроу (1630 - 1677) и итальянского математика, ученика Галилея Эванджелиста Торричелли (1608 - 1647), которые обозначили в своих трудах первые намеки на связь между интегрированием и дифференцированием.

Со временем при изучении интегралов менялись и символы, которыми их обозначали. В XVII веке английский учёный Исаак Ньютон в некоторых своих работах использовал в качестве символа интегрирования значок квадрата перед обозначением функции или вокруг него и вертикальную черту над функцией, но это обозначение не получило широкого распространения.

Привычное нам обозначение неопределённого интеграла было введено немецким учёным Готфридом Вильгельмом Лейбницем в 1675 году. Он создал символ интеграла из буквы “длинная s” (первой буквы слова Summa – сумма). Обозначение же определённого интеграла было предложено французским математиком Жаном Батистом Жозефом Фурье в 1819-20 годах. Сам термин интеграл придумал швейцарский математик Якоб Бернулли в 1690 году.

6

**ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ.**

**НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ.**

Функция F(x) называется первообразной для функции y = f(x) на промежутке (a; b), конечном или бесконечном, если функция F(x) дифференцируема в каждой точке этого промежутка и её производная удовлетворяет следующему равенству:

F′ (x) = f(x)

Последнее равенство можно записать через дифференциалы:

= f(x) или dF = f(x)dx

Теорема “О бесконечном множестве первообразных для функции”:

Если функция F(x) является первообразной для функции y = f(x) на некотором промежутке, то и функция G(x) = F(x) + C, где C - произвольная постоянная, также будет перообразной для функции на рассматриваемом промежутке.

Следовательно, если функция y = f(x) имеет первообразную, то она имеет бесконечное множество первообразных.

Совокупность всех первообразных функций y = f(x), определённых на данном промежутке, называется неопределенным интегралом от функции y = f(x) и обозначается символом ∫ f(x)dx. Таким образом

∫ f(x)dx = F(x) + C

Символ ∫ называется интегралом, f(x)dx подынтегральным выражением, f(x) – подынтегральной функцией, а x – переменной интегрирования.

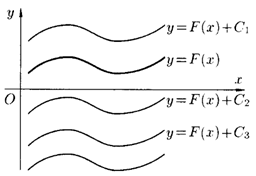


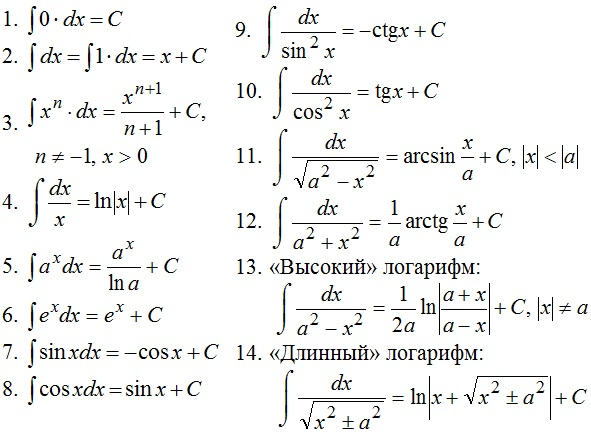
График функции неопределённого интеграла.

7

Операция нахождения первообразной или неопределённого интеграла от функции f(x) называется интегрированием функции f(x). Интегрирование является операцией, обратной дифференцированию, т. е. нахождению производной функции.

Благодаря этому таблицу первообразных для некоторых функций можно составить, используя таблицу производных. Например, зная, что , получаем , откуда следует, что все первообразные функции sin *x* записываются в виде , где C – произвольная постоянная.

Ниже приведена таблица основных формул некоторых первообразных.



8

**ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ФОРМУЛА НЮТОНА – ЛЕЙБНИЦА.**

Определённым интегралом от непрерывной функции f(x) на конечном отрезке [a; b], (где a ≠ b) называется приращение какой-либо её первообразной на этом отрезке и обозначается так:

x)dx

Числа b и a называются соответственно верхним и нижним пределами интегрирования, а отрезок [a; b] – отрезком интегрирования. В зависимости от того, возрастает или убывает функция f(x) на данном промежутке, определённый интеграл может быть как положительным, так и отрицательным числом.

Разность F(b) – F(a) называют интегралом от функции f(x) на отрезке [a; b], следовательно, верно следующее выражение:

x)dx = F(b) – F(a)

Формулу выше называют формулой Ньютона – Лейбница в честь создателей дифференциального и интегрального исчисления. Кратко разность F(b) – F(a) записывают так:

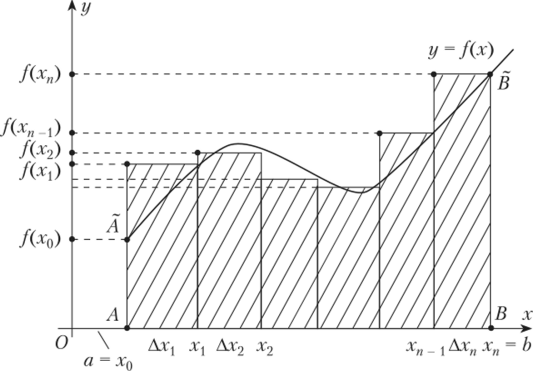
Поэтому, при решении задач формулу Ньютона – Лейбница записывают следующим образом:

x)dx = = F(b) – F(a)

9

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ.**

Как мы уже знаем, исторически интеграл возник в связи с вычислением площадей фигур, ограниченных кривыми линиями, в частности с вычислением площади криволинейной трапеции. На рисунке ниже изображена такая трапеция.



На этом рисунке основание трапеции – отрезок [A; B] – разбито на n отрезков (необязательно равных) точками x1, x2, …, xn-1. Через эти точки проведены вертикальные прямые. На каждом отрезке [*x*n-1; *x*n], n = 1, 2, …, k, выберем точку cn, и обозначим *x*n = *x*n - *x*n-1. Тогда f(cn)*x*n – площадь прямоугольника с основанием *x*n и высотой f (*x*n), а площадь криволинейной трапеции приближённо равна сумме площадей построенных прямоугольников:

Sn = f (c1) ∆*x*1 + f (c2) ∆*x*2 + … + f (cn) ∆*x*n

Сумму Sn называют интегральной суммой функции f (*x*) на отрезке [A; B].

Будем увеличивать число точек разбиения отрезка [A; B] так, чтобы наибольшая из длин отрезков [*x*n-1; *x*n] стремилась к нулю. Для любой непрерывной на отрезке [A; B] функции f (*x*) интегральные суммы стремятся к некоторому числу, те имеет предел, не зависящий от точек cn. Этот предел называют интегралом (определённым интегралом) от функции f (*x*) на отрезке [A; B] и вычисляют по формуле Ньютона – Лейбница.

10

**ИНТЕГРАЛЫ В ЖИЗНИ ЛЮДЕЙ.**

**ФИЗИКА.**

Помимо математики интегралы играют большую роль и в других науках. Одной из таких наук является физика. С помощью определённого интеграла можно вычислять различные физические величины: силу давления жидкости; путь, пройденный материальной точкой; кинетическую и потенциальную энергию тела и работу переменной силы.

Если материальная точка Z перемещается вдоль оси Ox под действием некой переменной силы F, направленной параллельно этой оси. Работа (A), произведённая при перемещении этой материальной точки из положения a в положение b находится по формуле:

A =

Помимо работы можно найти и расстояние, пройденное материальной точкой с переменной скоростью v за определённый промежуток времени от t1 доt2.

Физический смысл производной заключается в том, что скорость является производной от расстояния, ускорение – производная скорости. Следовательно, можно утверждать, что v(t) = . Из чего следует, что dS = v(t)dt. Применив метод интегрирования к данному равенству на промежутке от t1 до t2, получим следующее выражение:

S =

Как мы знаем, по закону Паскаля давление жидкости на горизонтальную пластину можно вычислить по формуле:

P = g*p*Sh,

Где g - ускорение свободного падения, *p* – плотность жидкости, S – площадь пластины, h – глубина погружения пластины.

Однако данную формулу нельзя использовать, если пластина расположена не горизонтально, а под каким-либо углом. В таком случае, различные точки, принадлежащие этой пластине, будут лежать на разной глубине. Найти давление этой жидкости на пластину можно с помощью методов дифференциала и интегрирования.

11

Пусть пластина ограничена линиями x =a, x =b, тогда p(x) – давление на искомую часть пластины соответствующее отрезку [a; b] значений переменной x, где x [a; b], p(a) = 0, p(b) = P, ∆x = dx, dp – дифференциал этой функции. Функция p(x) получит приращение ∆p. Тогда, используя закон Паскаля получим равенство dp = g*p*(f2(x) – f1(x))xdx. Интегрируя полученное равенство, получим:

P = g*p*

12

**БИОЛОГИЯ И МЕДЦИНА.**

В биологии использование интегралов также очень важно. Например, для изучения численности популяции, биомассы популяции и средней длины полёта животного.

Число особей постоянно изменяется. При благоприятных условиях он будет принимать положительные значения, т.е. рождаемость особей будет превышать смертность. В этом случае численность популяции будет постепенно расти с определённой скоростью. Обозначим эту скорость как v = v(t).

В зависимости от показателя скорости роста популяции биологи могут анализировать возраст популяции в целом и активность её взаимоотношений с другими популяциями и степень воздействия антропогенных факторов на её развитие. Например, в популяции, состоящей в основном из взрослых и старых особей, v будет стремиться к нулю, однако в относительно “молодой” популяции v может значительно колебаться.

Если мы будем знать скорость, то нетрудно будет и рассчитать прирост численности популяции за определённый промежуток времени от t1 до t2. Функция v(t) является производной от численности популяции S(t) (т.к. физический смысл производной заключается в том, что скорость – это производная от расстояния, объёма или, в нашем случае, численности). Поэтому,

S(t) = S(t2) – S(t1) =

Также изучение интегралов помогло в развитии медицины. На сегодняшний день невозможно изучение гемодинамики (движения крови по сосудам) без применения интегралов. С помощью интегрирования в медицине, зная линейную скорость кровотока в сосудах, рассчитывают примерную скорость для всей артерии или вены; также благодаря этому методу можно узнать ударным объём крови и внутривенное давление.

13

**ЭКОНОМИКА.**

Значение интегрирования в экономике также очень важно. Хоть его роль в экономических процессах рассматривается не так часто, как в других науках, интегрирование в экономике применяется довольно часто: для определения функции издержек, прогнозирования материальных затрат, нахождения потребительского излишка, определения экономической эффективности вложений и определения объёма выпуск продукции.

В экономике существует такое понятие как рыночное равновесия. Оно характеризуется как количество и цена, при которых объём спроса может совпадать с величиной предложения. Графически это можно изобразить как пересечение двух графиков: спроса и предложения.

Расчёт потребительского излишка – это величина, выражаемая как разность между максимальной суммой денег, которую готов был заплатить потребитель и той суммой, которую он заплатил в действительности. Таким образом, посчитать потребительский излишек можно по формуле:

CS = ,

Где Q\* - количество единиц товара, P\* - равновесная цена.

Таким образом экономисты могут вычислять изменения потребительских излишек в зависимости от различных вариантов налогообложения. С учётом необходимого размера налоговых поступлений, анализируют полученные результаты и останавливаются на наиболее выгодных для них вариантах.

14

**АРХИТЕКТУРА.**

Вы наверняка замечали, что крыши многих зданий Азии имеют очень необычную форму. Если сделано отнюдь не только для красоты. Первое обстоятельство, которое повлияло на выбор такой формы – это проливные дожди. Для того, чтобы вода находилась как можно дальше от стен здания, был придуман подобный скат. Создать подобную систему стало возможно только благодаря использованию интегралов. При создании этих конструкций нужно было рассчитывать, какая максимально возможная нагрузка будет приходиться на каждый отдельно взятый опорный столб и всё здание в целом. Благодаря точным расчётам древних зодчих, здания в Китае не только практичны и изящны, но и выдерживают регулярные землетрясения.





15

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.**

Благодаря всем вышеуказанным примерам становится ясно, что изобретение интегралов очень сильно повлияло на изучение людьми различных наук и упростило многие трудоёмкие вычисления.

Я познакомились с историей возникновения интегралов, поняла, из-за чего появилась необходимость в интегралах, и как ученые мира развивали данное направление в науке.

Узнала, что интегралы используются для изучения природы многими учеными: биологами, физиками, математиками, экономистами и др. Ведь использование интегралов дает людям преимущество в виде упрощения и ускорения сложных вычислительных операций.

Ознакомилась с основными способами применения интегралов, понятием неопределённый и определённый интеграл, а также выяснила каким образом с помощью интегрирования можно находить площадь различных криволинейных фигур.

Благодаря данной работе я смогла понять, зачем мы изучаем интегралы, в каких профессиях я могу с ними столкнуться, в каких науках, помимо математики, они используются и какую играют роль в нашей жизни.

16

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.**

* Учебник. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс.
* www.webmath.ru – онлайн энциклопедия
* ru.m.wikipedia.org – свободная энциклопедия
* matemonline.com - онлайн энциклопедия
* fuuction-x.ru – онлайн энциклопедия
* studme.org – онлайн энциклопедия

17